№4060 Дано: $KLMN$ - трапеция: $KL=8$; $MN=17$
$KL \cap MN = A$; PQ - ср. линия $KLMN$
$PQ \cap KM = S$; $PQ \cap LN = T$; $PQ = 17{,}5$; $St = 7{,}5$
$\omega(O;r)$ вписана в $\triangle ALM$
Найти r

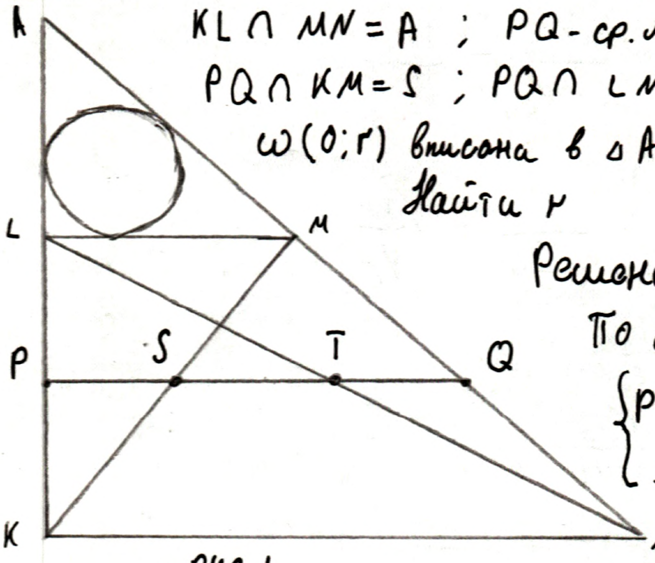


рис. 1.

Решение: Пусть $LM < KN$ (рис. 1)
По св-ву трапеции:

$$\begin{cases} PQ = \dfrac{LM+KN}{2} \\ ST = \dfrac{KN-LM}{2} \end{cases}$$

Решаем эту систему ур-ий:

$$+\begin{cases} 2PQ = LM+KN \\ 2ST = KN-LM \end{cases}$$

$2PQ + 2ST = 2KN$

$PQ + ST = KN$

$KN = 17{,}5 + 7{,}5 = 25$

$LM = 2PQ - KN = 2 \cdot 17{,}5 - 25 = 10$

$\angle ALM = \angle AKN$ (соответственные углы)

$\angle ALM = \angle AKN$ | по признаку
$\angle KAN$ - общий | $\triangle ALM \sim \triangle AKN$, значит:

$$\frac{AL}{AK} = \frac{AM}{AN} = \frac{LM}{KN}$$

Пусть $AL = x$, тогда

$$\frac{AL}{AK} = \frac{LM}{KN}$$

$$\frac{x}{x+KL} = \frac{LM}{KN}$$

$$\frac{x}{x+8} = \frac{2}{5}$$

$5x = 2(x+8)$

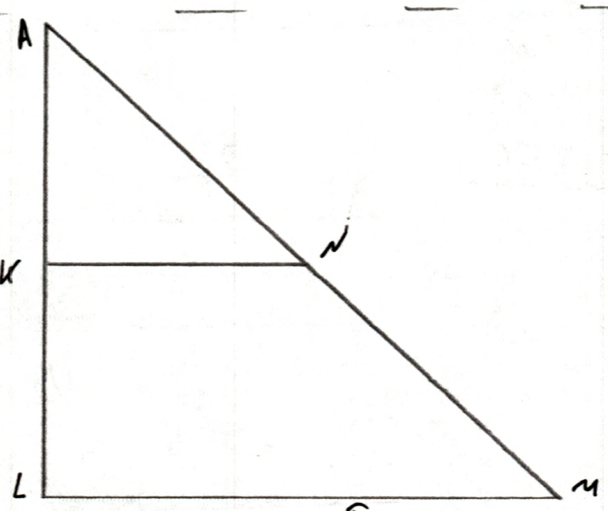
$x = \frac{16}{3} \Rightarrow AL = \frac{16}{3}$

Пусть $AM = y$, тогда

$$\frac{AM}{AM+MN} = \frac{LM}{KN}$$

$$\frac{y}{17+y} = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{34}{3} \Rightarrow AM = \frac{34}{3}$$



$10^2 + \frac{16^2}{9} = \frac{34^2}{9}$ - верно $\Rightarrow$ По обратной теореме Пифагора, т.к.

$AL^2 + LM^2 = AM^2$, $\triangle ALM$ - прямоугольный $(\angle ALM = 90^\circ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AKN = 90^\circ \Rightarrow KLMN$ - прямоугольная трапеция

$\triangle ALM$: $\angle ALM = 90^\circ \Rightarrow r = \frac{AL + LM - AM}{2} = \frac{\frac{16}{3} + 10 - \frac{34}{3}}{2} = 2$

Теперь пусть $LM > KN$, Аналогично

$\triangle AKN \sim \triangle ALM$; $\triangle ALM$ - прямоугольный

$$\begin{cases} PQ = \frac{LM+KN}{2} \\ ST = \frac{KN-LM}{2} \end{cases}$$

$KN = 10$; $LM = 25$

$AK = \frac{16}{3}$; $AN = \frac{34}{3}$, значит

$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = \frac{KL + AK + LM - AN - NM}{2} = \frac{8 + \frac{16}{3} + 25 - \frac{34}{3} - 17}{2} =$

$= 5$

Ответ: 2; 5