№4680

Дано: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$)

AD - биссектриса

$E \in (AD)$; $AE = \sqrt{26}$

$BC = 5$; $AC = 12$

Найти: S_{BCE}

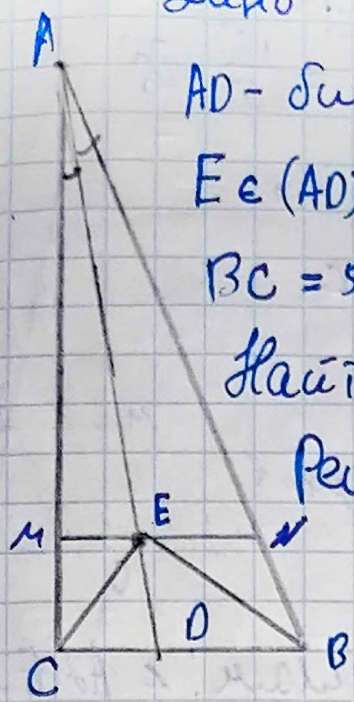


рис. 1

Решение:

В этой задачи возможны два случая: точка E лежит в треугольнике (рис. 1), точка E лежит вне треугольника (рис. 2). Сначала разберём первый случай:

По т. Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$

AD - биссектриса, значит по св-ву биссектрис:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AB}$$

Пусть $CD = x$, тогда $BD = 5 - x$, тогда:

$$\frac{x}{12} = \frac{5-x}{13}$$

$13x = 12(5-x)$

$x = \frac{12}{5}$, значит $CD = \frac{12}{5}$

См. следующую страницу.

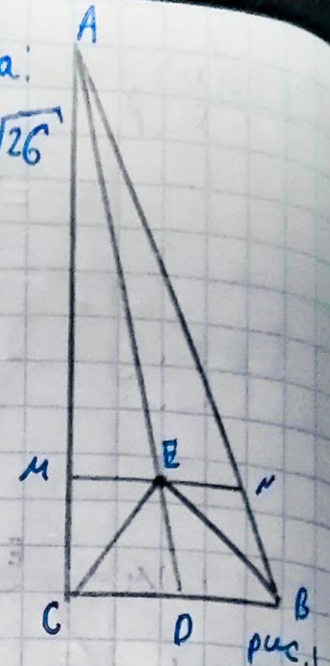
$\triangle ACD$: ($\angle C = 90°$) По т. Пифагора:

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{144 + \frac{144}{25}} = \frac{12}{5}\sqrt{26}$

Проведём $MN \parallel BC$, так, что

$E \in MN$, значит $MN \perp AC$

(как прямая, параллельная другой прямой, перпендикулярной третьей)



$\triangle AME \sim \triangle ACD$ (по 2-ум углам: $\angle AME = \angle ACD$; $\angle CAD$ - общий)

Значит: $\frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AD}$

Пусть $MC = y$, тогда $AM = 12 - y$, значит:

$\frac{12-y}{12} = \frac{\sqrt{26}}{\frac{12}{5}\sqrt{26}}$

$12 - y = 5$

$y = 7$, значит $MC = 7$

$\rho(E; BC) = MC$ (т.к. эти точки M и E лежат на прямой, параллельной BC) Значит

$S_{BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 = \frac{35}{2} = 17,5$

Теперь разберем второй случай, когда т. E лежит вне треугольника

См. след. стр

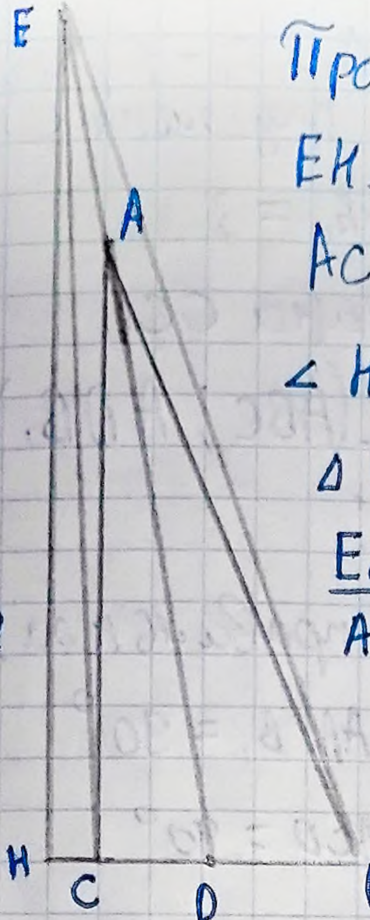


рис. 2

Проведём $EH \perp BC$

$EH \perp BC$ | по теореме
$AC \perp BC$ | $EH \parallel AC$, значит

$\angle HED = \angle CAD$ (соответственные)

$\triangle HED \sim \triangle CAD$ (по 2-ум углам), отсюда

$\frac{EH}{AC} = \frac{ED}{AD}$, отсюда

$EH = \frac{ED}{AD} \cdot AC = \frac{\frac{12}{5}\sqrt{26} + \sqrt{26}}{\frac{12}{5}\sqrt{26}} \cdot 12 = 17$

$EH \perp BC$, значит

$S_{BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 17 = \frac{85}{2} = 42{,}5$

$\boxed{\text{Ответ: } 17{,}5 \text{ или } 42{,}5}$