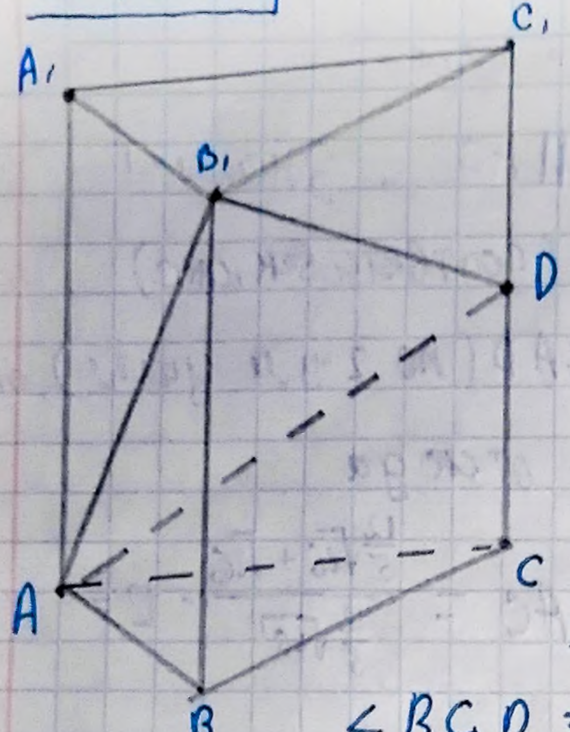
№4098



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма

$AB = 1$; $AA_1 = 3$

D – середина CC_1

Найти $\angle(ABC; ADB_1)$

Решение:

Призма – правильная, значит $\angle AA_1B_1 = 90°$

$\angle BC_1D = 90°$; $\angle ACD = 90°$;

ΔAA_1B_1: ($\angle A_1 = 90°$) по т. Пифагора

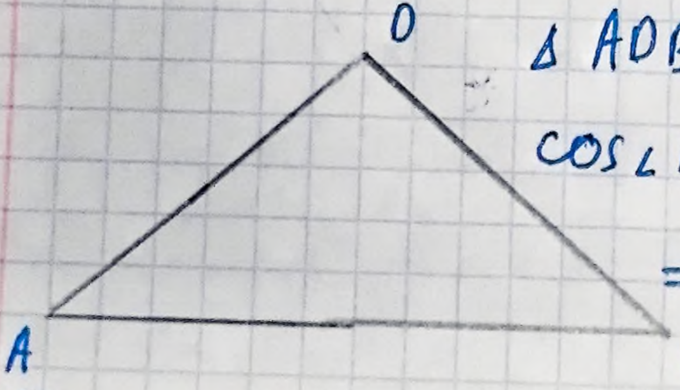
$AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

ΔBC_1D ($\angle C_1 = 90°$) по т. Пифагора:

$B_1D = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1D^2} = \sqrt{B_1C_1^2 + \frac{CC_1^2}{4}} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

ΔADC ($\angle C = 90°$) по т. Пифагора:

$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{AC^2 + \frac{CC_1^2}{4}} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$



ΔADB_1: по т. косинусов

$\cos\angle ADB_1 = \frac{AD^2 + DB_1^2 - AB_1^2}{2AD \cdot DB_1} =$

$= \frac{\frac{13}{4} + \frac{13}{4} - 10}{2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} = -\frac{7}{13}$

Из основного тригонометрического тождества:

См. след. стр.

$\sin\angle ADB_1 = \sqrt{1-\cos^2\angle ADB_1} = \sqrt{1-\frac{49}{169}} = \frac{2}{13}\sqrt{30}$

$S_{ADB_1} = \frac{1}{2} AD \cdot B_1D \cdot \sin\angle ADB_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{2}{13}\sqrt{30} = \frac{\sqrt{30}}{4}$

$\triangle ABC$: $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

По св-ву правильной призмы:

$BB_1 \perp (ABC)$; $DC \perp (ABC)$, значит

$\triangle ABC$ - ортогональная проекция $\triangle AB_1D$ на (ABC)

Значит по Т. о площади ~~перпендик.~~ ортогональной проекции:

$\cos\angle(ABC; ADB_1) = \frac{S_{ABC}}{S_{ADB_1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{30}}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, отсюда

$\angle(ABC; ADB_1) = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$

Ответ: $\angle(ABC; ADB_1) = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$