

№4140

Дано:  $\omega_1(O_1; R_1)$

$\omega_2(O_2; R_2)$

$R_1 = 2 ; R_2 = 3$

$\omega_1 \cap \omega_2 = A$

$A \in BC : BC \cap \omega_1 = B$

$BC \cap \omega_2 = C$

$\angle ABO_1 = 30^\circ$

Найти:  $S_{BCO_2}$

$R_1 = O_1A = O_1B = 2$

$R_2 = O_2C = O_2A = 3$  - радиусы, значит

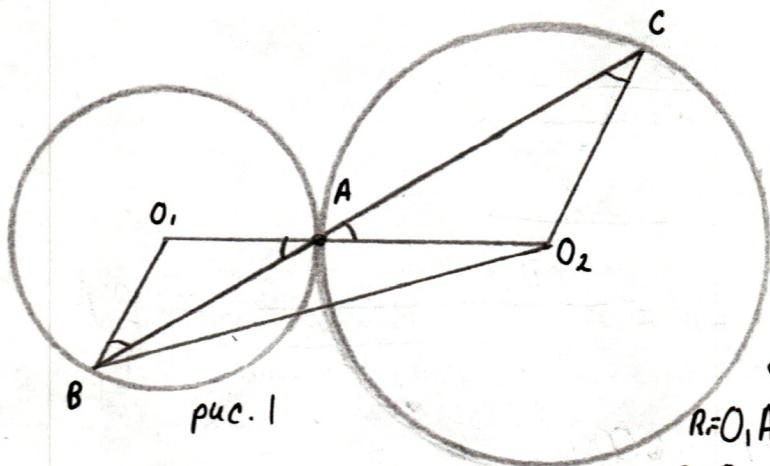


рис. 1

$\triangle O_1BA$  и  $\triangle O_2AC$  - равнобедренные треугольн.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1BA = \angle O_1AB$

$\angle ACO_2 = \angle O_2AC$

Возможны 2 случая: окружности

касаются внешним образом, тогда:

$\angle O_1AB = \angle O_2AC$  (вертикальные)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1BA = \angle O_1AB = \angle O_2AC = \angle O_2CA = 30^\circ$ , значит

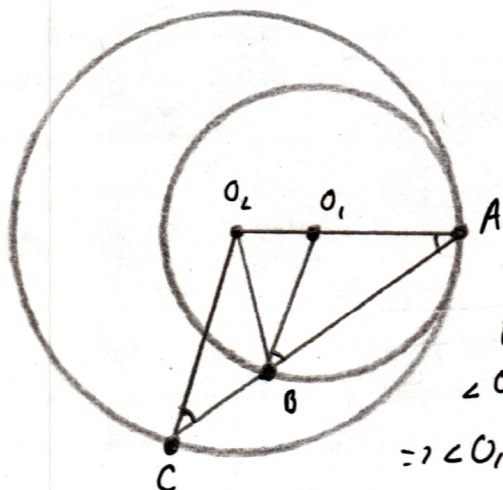


рис. 2

$\triangle BAO_1 \sim \triangle CAO_2$  (по 2-ум углам), тогда:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{O_1B}{O_2C} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle O_1AB : \angle BO_1A = 180^\circ - \angle O_1BA - \angle O_1AB = 120^\circ$$

По т. косинусов:

$$AB^2 = O_1B^2 + O_1A^2 - 2 \cdot O_1B \cdot O_1A \cdot \cos \angle BO_1A = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$$

$$AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{3}{2} AB = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$BC = AB + AC = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$S_{BCO_2} = \frac{1}{2} BC \cdot O_2C \cdot \sin \angle BCO_2 = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

Также возможен случай, когда окружности касаются внутренним образом (рис. 2), тогда:



$$\angle O_1 A B = \angle O_2 A C \text{ (обушки)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle O_1 B A = \angle O_1 A B = \angle O_2 A C = \angle O_2 C A = 30^\circ, \text{ значи}$$

$\triangle B A O_1 \sim \triangle C A O_2$  (по 2-м углам), тогда

$$\frac{A B}{A C} = \frac{O_1 B}{O_2 C} = \frac{2}{3}$$

$\triangle O_1 A B$ : Аналогично  $A B = 2\sqrt{3}$ , тогда

$$A C = 3\sqrt{3}$$

$$B C = A C - A B = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$S_{\triangle B C O_2} = \frac{1}{2} \cdot B C \cdot O_2 C \cdot \sin \angle B C O_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ или } \frac{15\sqrt{3}}{4}$$