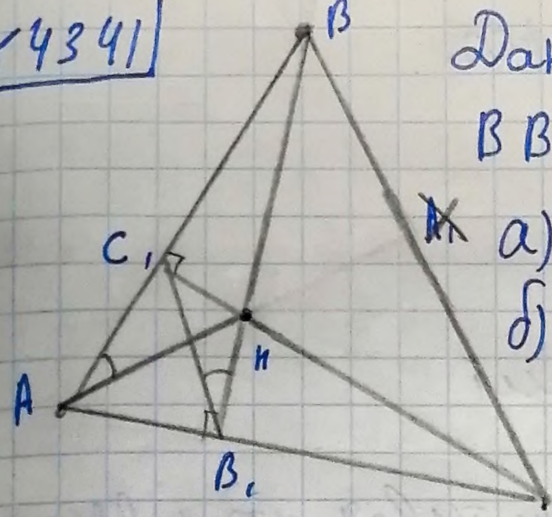
№ 434 |



Дано $\triangle ABC$ - остроугольный

BB_1 и CC_1 - высоты

а) Док-ть $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$

б) Если $B_1C_1 = 10\sqrt{3}$, $\angle BAC = 60^\circ$

Найти расстояние от центра окр. опис. вокруг $\triangle ABC$ до сторона BC

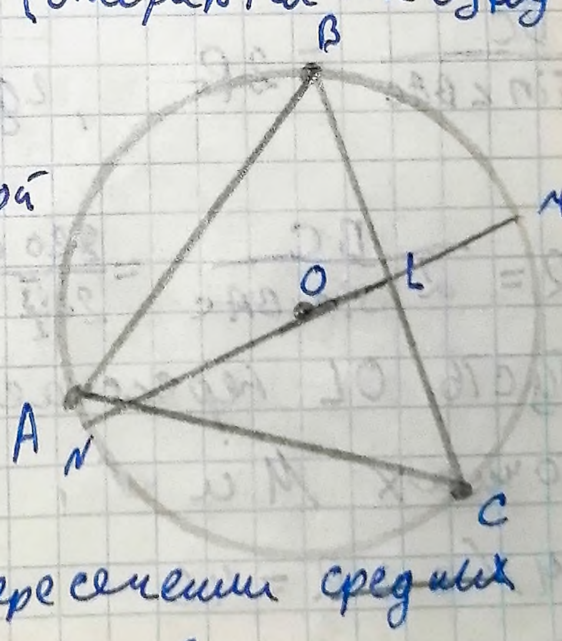
а) Рассмотрим четырехугольник AC_1HB_1

$\angle AC_1H = \angle AB_1H = 90^\circ$, значит

$\angle AC_1H + \angle AB_1H = 180^\circ$, по признаку

вокруг AC_1HB_1 можно описать окружность,

значит $\angle C_1AH = \angle C_1B_1H$ (Опираются на одну и ту же дугу C_1H)



б) Пусть O - центр описаной около $\triangle ABC$ окружности

L - середина BC

Т.К. центр описаной окружности лежит на пересечении средних серединных перпендикуляров треугольника, то искомое расстояние равно OL

Теперь рассмотрим $\triangle ACC_1$:

$$\cos\angle BAC = \frac{AC_1}{AC}$$

$\triangle ABB_1$:

$$\cos\angle BAC = \frac{AB_1}{AB}$$, значит

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}$$, отсюда, учитывая что $\angle BAC$ - общий: $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$, отсюда

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{1}{\cos\angle BAC} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$BC = 2B_1C_1 = 20\sqrt{3}$$

По т. синусов:

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R$$, где R - радиус описанной окружности

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{\cancel{2}\cdot 20\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20$$

Пусть OL пересекает окружность в точках M и N, тогда MN - диаметр

$MN = 2R = 40$

Пусть $OL = x$, тогда $NL = 20 + x$

$LM = 20 - x$

$MN \perp BC$, Из соотношений между длинами хорд:

$BL \cdot LC = NL \cdot LM$

$10\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = (20+x)(20-x)$

$300 = 400 - x^2$

$x^2 = 100$

$x = 10$

$x = -10$ - не удовлетворяет условиям задачи

Значит $OL = 10$

$\boxed{\text{Ответ: } 10}$