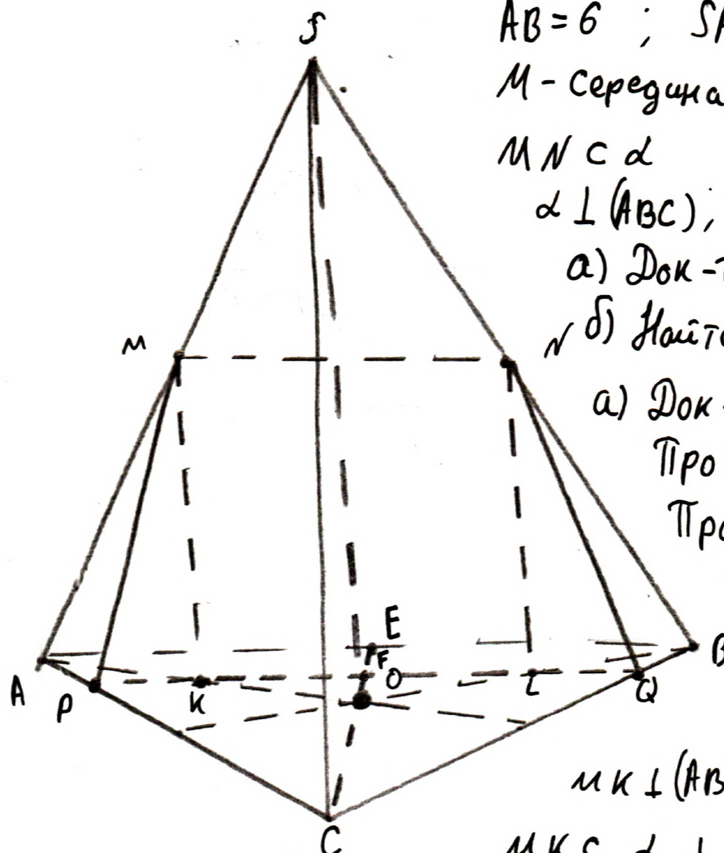
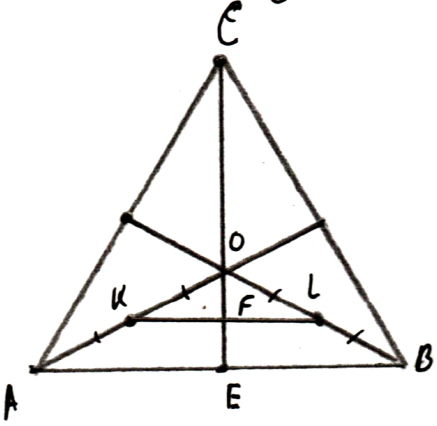
№ 4632

Дано $SABC$ - правильная пирамида
$AB = 6$; $SA = 4$
M - середина SA ; N - середина SB
$MN \subset \alpha$
$\alpha \perp (ABC)$; $\alpha \cap CE = F$
а) Док-ть $CF : FE = 5 : 1$
б) Найти P_α



а) Док-во: ~~SO - высота, где O - центр △ABC~~
Проведём $MK \parallel SO$
Проведём $NL \parallel SO$
По св-ву правильной пирамиды: $SO \perp (ABC)$, значит
$MK \perp (ABC)$; $NL \perp (ABC)$ =>

$\left.\begin{array}{l} MK \subset \alpha \\ NL \subset \alpha \end{array}\right| \Rightarrow KL \subset \alpha$



В △SAO и △SBO
MK и NL - ср. линии, значит
$OK = AK$; $OL = LB$
△ABC: По св-ву медиан
$$\frac{OE}{OC} = \frac{1}{2}$$
В △AOB KL - средняя линия, значит $KL \parallel AB$, отсюда
По т. Фалеса: $\frac{OF}{FE} = \frac{OK}{AK} = 1 \Rightarrow FE = OF$

$OE = OF + FE = 2FE$, значит

$\frac{FE}{OC} = \frac{1}{4}$, а $\frac{CF}{FE} = \frac{CO + OF}{FE} = \frac{CO}{FE} + 1 = 4 + 1 = 5$, значит

$\frac{CF}{FE} = \frac{5}{1}$ или $CF : FE = 5 : 1$

ч т д

$KL \cap AC = P$

$KL \cap BC = Q$

Т.к. $KL \subset \alpha$, то $\{P, Q\} \subset \alpha$

$KL \parallel AB \Rightarrow PQ \parallel AB$

По т. Фалеса

$$\frac{CP}{AP} = \frac{CQ}{QB} = \frac{CF}{FE} = \frac{5}{1}$$

$\triangle CPQ \sim \triangle CAB$ (по углу и двум пропорциональным сторонам)

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{PC}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$PQ = \frac{5}{6} AB = \frac{5}{6} \cdot 6 = \cancel{\frac{24}{5}}\ 5$$

MN - ср. линия $\triangle ASB \Rightarrow MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

$\triangle ABC$:

$$CO = \frac{2}{3} CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{3} AB = 2\sqrt{3}$$

$\triangle SCO$: По т. Пифагора: $SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{16 - 4 \cdot 3} = 2$

$\triangle ASO$: MK - ср. линия $\Rightarrow MK = \frac{1}{2} SO = 1$, аналогично $NL = 1$

$\triangle ABC$: т.к. $\triangle ABC$ - правильный (св-во правильной пирамиды) и $KL \parallel AB$; $\triangle AOC = \triangle BOC$, то $PK = LQ$

$PQ = KL + PK + LQ$

$$PK = \frac{PQ - KL}{2}$$

$KL = \cancel{ср}\ \frac{1}{2} AB = 3$

$$PK = \frac{5\cancel{\frac{24}{5}} - 3}{2} = \cancel{\frac{9}{10}}\ 1$$

$MK \perp (ABC) \Rightarrow MK \perp PK$

$NL \perp (ABC) \Rightarrow NL \perp LQ$

$MK = NL$
$PK = LQ$
$\angle MKP = \angle NLQ = 90^\circ$

по признаку $\triangle MPK = \triangle NLQ$, значит $NQ = MP$

ΔMPK $(K = 90°)$

По т. Пифагора:

$MP = \sqrt{PK^2 + MK^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$NQ = MP = \sqrt{2}$

Плоскость α пересекает фигуру в точках $PMNQ$

$PMNQ$ - искомое сечение $\Rightarrow$

$P_\alpha = P_{PMNQ} = MN + PQ + MP + NQ = 3 + 5 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 8 + 2\sqrt{2}$

Ответ: $8 + 2\sqrt{2}$