№ 4949 $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$

ОДЗ:

$64x>0$

$x>0$

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\frac{4\log_4 x+16}{\log^2 x-9}$$

$$\frac{\log_4 x+3}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4 x+3}\geq 4\frac{\log_4 x+4}{\log^2 x-9}$$

Пусть $t=\log_4 x$, тогда

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}\geq 4\frac{t+4}{t^2-9}$$

$$\frac{(t+3)(t+3)+(t-3)(t-3)}{(t-3)\cdot(t+3)}-4\frac{t+4}{t^2-9}\geq 0$$

$$\frac{(t+3)^2+(t-3)^2-4(t+4)}{t^2-9}\geq 0$$

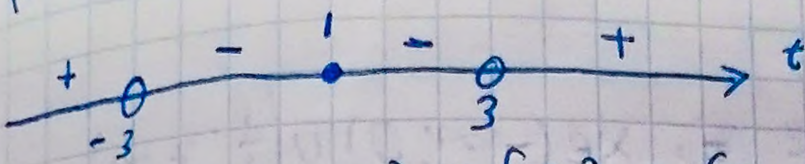
$$\frac{t^2+6t+9+t^2-6t+9-4t-16}{t^2-9}\geq 0$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{t^2-9}\geq 0$$

$$\frac{t^2-2t+1}{t^2-9}\geq 0$$

См. след. стр.

$$\frac{(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$



$t \in (-\infty; -3) \cup \{1\} \cup (3; +\infty)$

Вернёмся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x < -3 \\ \log_4 x = 1 \\ \log_4 x > 3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x < 4^{-3} \\ x = 4 \\ x > 4^{3} \end{array}\right.$$

$x \in (-\infty; \frac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$

С учётом ОДЗ:

$x \in (0; \frac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$

$$\boxed{\text{Ответ: } x \in (0; \tfrac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)}$$