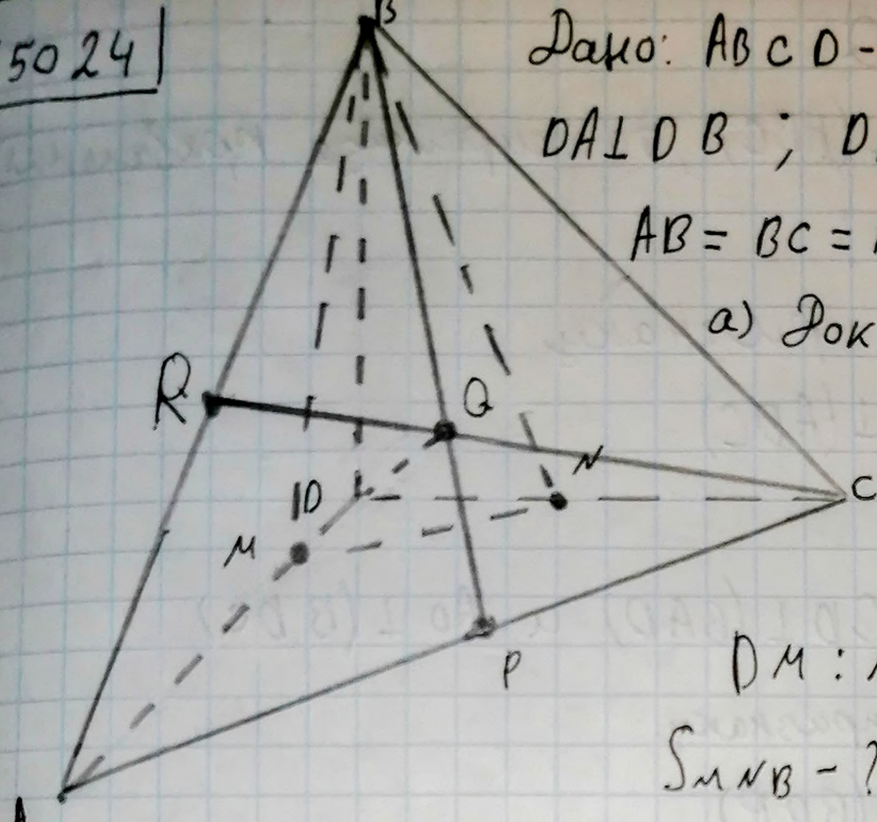
№5024



Дано: ABCD - пирамида

$DA \perp DB$; $DA \perp DC$; $DB \perp DC$

$AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$

а) Док-ть ABCD - правильная пирамида

б) $M \in [DA]$

$N \in [DC]$

$DM : MA = DN : NC = 2 : 3$

S_{MNB} - ?

Решение:

$\triangle ABD$, $\triangle BDC$, $\triangle ADC$ - прямоугольные, значит

$BD^2 + AD^2 = AB^2$ (1)

$BD^2 + DC^2 = BC^2$

$AD^2 + DC^2 = AC^2$

т.к. $AB = BC = AC \Rightarrow AB^2 = BC^2 = AC^2$, значит

$BD^2 + AD^2 = BD^2 + DC^2 = AD^2 + DC^2$, отсюда

$BD = AD = CD$ из (1):

$BD = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 5$, значит $BD = AD = CD = 5$

т.к. $\triangle ABC$ - правильный $\Rightarrow$ Проведём BP - медиану, высоту и биссектрису и

CR - медиана, высота, биссектриса

$BP \cap CR = Q$

Если $DQ \perp (ABC)$, то пирамида правильная,

Докажем это:

$BD \perp AD$ | по признаку
$BD \perp CD$ | $BP \perp (ADC)$
$AD \cap CD = D$ |

Аналогично $CD \perp (BAD)$ и $AD \perp (BDC)$

$AC \perp BP$ | по признаку
$AC \perp BD$ | $AC \perp (BDP)$

Аналогично $AB \perp (CRD)$, значит

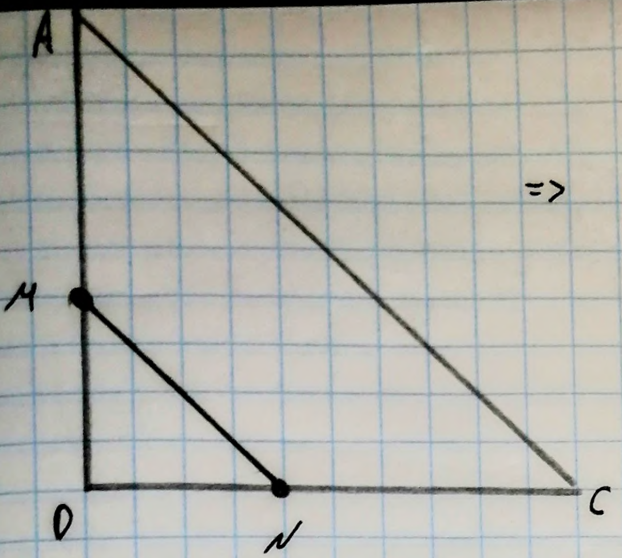
$DQ \perp AC$ | по признаку
$DQ \perp AB$ | $DQ \perp (ABC)$

$DQ \perp (ABC)$ | по признаку
Q - центр $\triangle ABC$ | $ABCD$ - правильная
$AB = BC = AC$ | пирамида

ЧТД

б) $\frac{MD}{MA} = \frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$, значит

$\frac{MD}{AD} = \frac{DN}{DC} = \frac{2}{5}$, значит



$\triangle MDN \sim \triangle ADC \Rightarrow$

$\Rightarrow MN = \frac{2}{5} AC = \frac{2}{5} \cdot 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

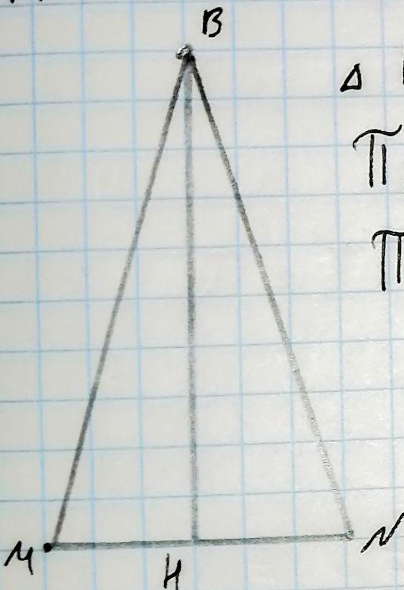
$DN = \frac{2}{5} DC = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$

$MD = \frac{2}{5} AD = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$

$\triangle BDM$ $(\angle D = 90°)$. По т. Пифагора:

$BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

Аналогично в $\triangle BDN$: $BN = \sqrt{29}$



$\triangle BMN$: $BM = BN \Rightarrow \triangle BMN$ – равнобедр.

Проведём $BH \perp MN$

По св-ву равнобедр. треугольника:

BH - медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow MH = HN = \frac{1}{2} MN = \sqrt{2}$

$\triangle BHN$: По т. Пифагора

$BH = \sqrt{BN^2 - HN^2} = \sqrt{29 - 2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$S_{BMN} = \frac{1}{2} BH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$

Ответ: $S_{BMN} = 3\sqrt{6}$